Institut für Telematik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Prof. Dr. M. Zitterbart
Dipl.-Inform. C. Haas

Algorithmen I

Sommersemester 2011

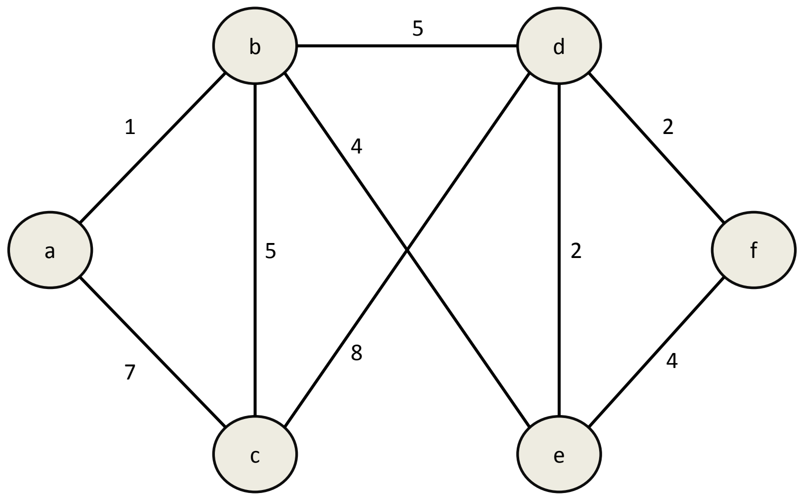
6. Übungsblatt

Minimale Spannbäume und generische Optimierungsansätze

Aufgabe 1

Minimale Spannbäume

Gegeben sei der abgebildete, ungerichtete Graph mit den Kantengewichten aus {1,2,4,5,7,8}. (10P)



(a) Führen Sie den Algorithmus von Kruskal aus. Markieren Sie alle zum MST gehörenden Kanten, sowie die Reihenfolge der von Ihnen betrachteten Kanten. (3P)

(b) Führen Sie den Algorithmus von Prim ausgehend vom Knoten a aus. Markieren Sie alle zum MST gehörenden Kanten, sowie die Reihenfolge der von Ihnen betrachteten Kanten und Knoten. (3P)

(c) Setzen Sie voraus, dass die Kantengewichte eines Graphen ganze Zahlen aus dem Bereich 1 bis $|V|$ sind. Wie schnell können Sie Prims Algorithmus machen? Wie schnell können Sie ihn machen, wenn die Kantengewichte ganze Zahlen aus dem Bereich 1 bis W für eine Konstante W sind? (4P)

Aufgabe 2

Dynamische Programmierung

Gegeben sei ein Farbbild, das aus einem Feld $A[1..m,1..n]$ von Pixeln besteht, wobei jeder Pixel als Tripel, das die Rot-,Grün- und Blau-Intensität (RGB) angibt, spezifiziert ist. Nehmen Sie an, wir würden das Bild gerne leicht komprimieren.

Genauer: Wir würden gerne ein Pixel in jeder der m Zeilen entfernen, sodass das Gesamtbild um ein Pixel schmaler wird. Um störende visuelle Effekte zu vermeiden sei gefordert, dass die entfernten Pixel in zwei benachbarten Zeilen in der gleichen oder in adjazenten Spalten liegen. Die zu entfernenden Pixel bilden eine sogenannte *Naht*, die in der obersten Zeile beginnt und in der untersten Zeile endet, wobei zwei aufeinanderfolgende Pixel der Naht vertikal oder diagonal zueinandern adjazent sind. (25P)

(a) Zeigen Sie, dass die Anzahl solcher Nähte wenigstens exponentiell in m wächst, davon ausgehend, dass $n > 1$ gilt. (10P)

(b) Setzen Sie nun voraus, dass zu jedem Pixel $A[i,j]$ ein reelwertiger Bruchwert $d[i,j]$ existiert, der angibt, wie störend es wäre, Pixel $A[i,j]$ zu entfernen. Intuitiv gesehen gilt, dass je kleiner der Bruchwert eines Pixels ist, umso ähnlicher ist der Pixel zu seinen Nachbarn. Setzen Sie weiterhin voraus, dass wir den Bruchwert einer Naht als die Summe der Bruchwerte ihrer Pixel definieren. Geben Sie einen Algorithmus an, um eine Naht mit einem minimalen Bruchwert zu berechnen. Geben Sie die Komplexität Ihres Algorithmus an. (15P)

Aufgabe 3

Greedy-Algorithmen

Betrachten Sie das Problem, Wechselgeld im Wert von n Cents so zusammenzustellen, dass so wenige Münzen wie möglich verwendet werden. Setzen Sie voraus, dass der Nennwert jeder Münze eine ganze Zahl ist. (25P)

(a) Geben Sie einen Greedy-Algorithmus an, der das Wechselgeld aus 25 Cent, 10 Cent, 5 Cent und 1 Cent Münzen zusammenstellt. Beweisen Sie, dass Ihr Algorithmus zu einer optimalen Lösung führt. (10P)

(b) Geben Sie eine Menge von Münzwerten an, für die der Greedy-Algorithmus zu keiner optimalen Lösung führt. Ihre Menge sollte eine 1 Cent Münze enthalten, sodass es für jeden Wert von n eine Lösung gibt. (5P)

(c) Geben Sie einen Algorithmus der Komplexität $O(nk)$ an, der das Wechselgeld für eine beliebige Menge von k verschiedenen Münztypen unter der Voraussetzung erstellt, dass einer von ihnen eine 1 Cent Münze ist. Tipp: Optimale Teilstruktur (10P)

Abgabe des Übungsblattes bis Mittwoch, 06.07.2011 – 12 Uhr durch Einwurf in den entsprechenden Briefkasten im Gebäude 50.34, 1. UG.